

Modell des Tidenhubs bei Variation des Abstandes Erde-Mond

Steffen Maus und Daniel Roth Netzmedien GbR

www.netzmedien.de

Autor: Steffen Maus

24.02.2002

Inhaltsverzeichnis

1	Gezeitenkräfte	2
2	Allgemeine Rechnung für System Erde-Mond	2
3	Die Normalkomponente der Gezeitenkraft	4
4	Bestimmung des Tidenhubs	4
5	Näherungsverfahren für \vec{f}	6
6	Zusammenfassung	7
7	Tabelle der numerischen Ergebnisse und Vergleich mit der Näherung	8

1 Gezeitenkräfte

Der Begriff der Gezeitenkräfte, der meist in Zusammenhang mit dem Erde-Mond-System genannt wird, beruht nicht wie oft vermutet auf Fliehkrafteffekten, sondern auf differentieller Schwerkraft, die auf räumlich ausgedehnete Objekte wirkt.

Zur Illustration ein einfaches Beispiel in nur einer räumlichen Dimension:

gegeben seien zwei Punktmassen m , die durch einen Faden der Länge r zusammengehalten werden, im Schwerefeld einer (Punkt-)masse M .



Abbildung 1: Gezeitenkräfte in einer Dimension

Nach dem allgemeinen Gravitationsgesetz wirkt auf die beiden Massen m die Kraft

$$F_1 = \gamma \frac{mM}{R^2} \quad (1)$$

bzw.

$$F_2 = \gamma \frac{mM}{(R+r)^2}. \quad (2)$$

mit: $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ (Gravitationskonstante)

Wie man sofort erkennt, wächst die Kraft mit kleiner werdendem Abstand R zur felderzeugenden Masse M immer mehr an ($F_1 > F_2$), demnach wird der Faden mit $F_1 - F_2$ gespannt.

Sind die beiden Probmassen hingegen nicht miteinander verbunden, so führt die Gezeitenkraft $F_1 - F_2 := m\Delta a$ zu einer stetigen Zunahme des Abstandes zwischen ihnen.

2 Allgemeine Rechnung für System Erde-Mond

Beim Übergang zum dreidimensionalen Fall des Erde-Mond-Systems ist obige Betrachtung für jeden Punkt der kugelförmig angenommenen Erdoberfläche durchzuführen. Der Mond kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit als punktförmig angenommen werden, so lange sich Erde und Mond nicht berühren,

denn das Gravitationsfeld einer rotationssymmetrischen Massenverteilung ist gleich dem einer Punktmasse.

Berechnet wird nun die Gezeitenbeschleunigung $\Delta\vec{a}(\vec{r}')$ an einem beliebigen Punkt der Erdoberfläche. Das System ist rotationssymmetrisch um die Verbindungsachse zwischen den Schwerpunkten von Erde und Mond, somit genügt es, die Betrachtung für eine Schnittebene durch die Schwerpunkte zu führen (vgl. Abb.).

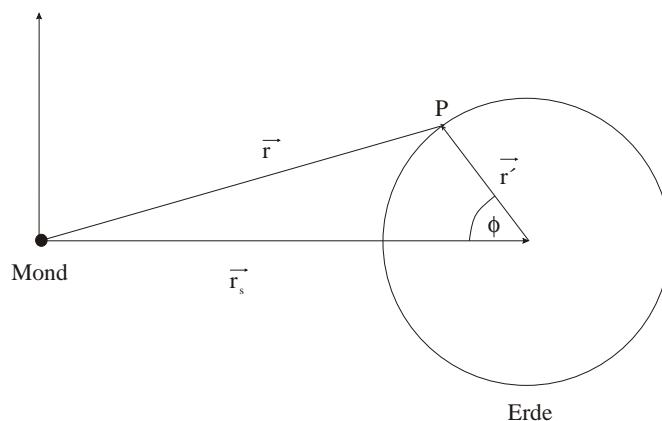


Abbildung 2: Das System Erde-Mond

Die allgemeine Formel der Gravitationsbeschleunigung einer Probemasse im Abstand r einer Masse m lautet

$$\vec{a}_{grav} = \gamma \frac{m}{r^3} \vec{r}. \quad (3)$$

Für obigen Fall gilt also am Punkt P ($R =$ Erdradius)

$$\Delta\vec{a}(\vec{r}') = \gamma m \left(\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{r}'}{r_s^3} \right) = \quad (4)$$

$$= -g \frac{m}{M} \frac{R^3}{r_s^3} \left(\frac{\vec{r}_s}{R} - \frac{\vec{r}'}{R} \left(\frac{r_s^3}{r^3} \right) \right) := -g \frac{m}{M} \frac{R^3}{r_s^3} \vec{f} \quad (5)$$

wobei der Vektor \vec{f} im Wesentlichen die Richtung und die relative Größe der Beschleunigung angibt. Der numerische Wert folgt dann durch Multiplikation mit dem Vorfaktor.

Mittels des Winkels ϕ aus obiger Abbildung lässt sich \vec{f} vereinfacht schreiben als

$$\vec{f} = \left(\frac{r_s}{R} - \left(\frac{r_s}{r} \right)^3 \left(\frac{r_s}{R} + \cos \phi \right), - \left(\frac{r_s}{r} \right)^3 \sin \phi \right) \quad (6)$$

Für den Tidenhub verantwortlich ist nun nicht die gesamte Größe \vec{f} , sondern lediglich der Anteil, welcher senkrecht auf die Erdoberfläche ist. Der komplementäre Anteil, der in der lokalen Ebene der Erdoberfläche liegt, leistet keinen Beitrag zum Tidenhub, allerdings werden hierdurch die Gezeitenströmungen verursacht. Diese wiederum führen zu den zum Teil extrem hohen Gezeitenwirkungen, welche in verschiedenen Buchten bei entsprechend günstiger Form auftreten.

3 Die Normalkomponente der Gezeitenkraft

Die für den Tidenhub verantwortliche Normalkomponente von \vec{f} bezüglich der Erdoberfläche berechnet sich aus dem Skalarprodukt $\vec{f} \cdot \vec{n}$ mit dem Normalenvektor $\vec{n} = (\cos \phi, \sin \phi)$.

$$\boxed{\vec{f} \cdot \vec{n} = \frac{r_s}{R} \cos \phi \left(1 - \frac{r_s^3}{(R^2 + r_s^2 - 2Rr_s \cos \phi)^{3/2}} \right) - \frac{r_s^3}{(R^2 + r_s^2 - 2Rr_s \cos \phi)^{3/2}}} \quad (7)$$

Bis an diesen Punkt ist die Theorie exakt, keine Näherungen sind bis hierher eingeflossen. Zur endgültigen Berechnung des Tidenhubs ist jedoch eine (wie noch gezeigt wird, unwesentliche) Einschränkung getroffen werden.

4 Bestimmung des Tidenhubs

Die Oberfläche des offenen Ozeans wird sich bei Vernachlässigung von inneren Reibungskräften (welche im realen Fall im Wesentlichen zu einem Hinterherhinken der Flutwelle hinter dem Mond führen) genau an einer Äquipotentialfläche des Gravitationspotential des Systems Erde-Mond ausrichten. Setzt man voraus, dass sowohl Erde als auch Mond eine kugelförmige Gestalt annehmen, berechnet sich die Äquipotentialfläche einfach aus der allgemeinen Gravitationsgleichung zu

$$R_{max} = \sqrt{\frac{\gamma M_E}{g + \Delta a_{min}}} \quad (8)$$

$$R_{min} = \sqrt{\frac{\gamma M_E}{g + \Delta a_{max}}} \quad (9)$$

Man geht also davon aus, dass die Änderung der Erdoberfläche durch die Gezeitenkraft ihre Form nicht wesentlich ändert.

Fehlerabschätzung:

Bei einem Abstand der Schwerpunkte von Erde und Mond von 2 Erdradien errechnet man einen maximalen Tidenhub von ca. 100km . Wegen der Asymmetrie in Ebbe- und Flutwirkung (s. unten) folgt daraus eine mittlere Massenverschiebung an der Erdoberfläche von ca. 35km Höhe. Setzt man dies in Verhältnis zum Erdradius von 6370km , so wird der Fehler durch obige Näherung im Bereich unterhalb $0,6\%$ liegen. Für größere Annäherung wächst der Zenithub immens schnell an, weswegen die Näherung der Kugelförmigkeit nicht mehr ohne Einschränkungen aufrecht erhalten werden kann. Für diesen Extremfall sind weitergehende sehr aufwändige Rechnungen mit Hilfe zeitunabhängiger Störungsrechnung von Nöten. Dieser Weg soll hier nicht weiter verfolgt werden, da bei Tidenhuben über 100km für das reale Objekt Erde sehr extreme Effekte erwartet werden können (Zerreißen der kompletten Plattenstruktur, die lediglich eine Dicke von einigen 10km besitzen). Für noch größere Annäherungen versagt also das Modell vollständig, auftretende Effekte sind kaum noch vorhersagbar.

Der maximale Tidenhub berechnet sich als Differenz

$$\Delta R = R_{max} - R_{min}, \quad (10)$$

wobei der Zenithub als Differenz von R_{max} der mondzugewandten Seite und dem darauf folgenden R_{min} bestimmt wird, der Nadirhub ab dem R_{max} zur mondabgewandten Seite gerechnet wird.

Leider ist Gleichung (7) nicht analytisch für beliebige Abstände Erde-Mond bestimmbar, und die numerische Bestimmung in adäquater Näherung ist für Webanwendungen mit zumeist geringer numerischer Leistung nicht in Echtzeit durchführbar. Aus diesem Grund werden die numerischen Rechnungen vorab durchgeführt; die Ergebnisse, die als Grundlage der grafischen Simulationen dienen können, sind im Anhang aufgeführt.

Erläuterung zu den angegebenen Werten:

Die Zenitflut tritt auf bei einem Winkel von $\phi = 0^\circ$, das darauf folgende Ebbetal erreicht sein Minimum bei ca. $\phi = 45^\circ$. Die etwas flachere Nadirflut setzt bei $\phi = 90^\circ$ ein, das Minimum tritt wegen der Symmetrie um die Verbindungsachse Erdschwerpunkt - Mondschwerpunkt wiederum bei ca. $\phi = 45^\circ$ auf. Der maximale Tidenhub errechnet sich dann aus der Differenz zwischen den Hüben des Flutbergs und Ebbetals.

Man beachte:

Die Tabellenwerte sind bzgl. ihres Nullpunktes nicht normiert, d.h. die Auslenkung bei Ebbe ist natürlich im Vergleich zu ihrer hypothetischen Lage bei Abwesenheit des Mondes negativ. Für den Tidenhub als Differenz zwischen Flut und Ebbe ist diese absolute Nullage jedoch nicht relevant!

5 Näherungsverfahren für \vec{f}

Mittels einer Taylorentwicklung von \vec{f} bis zum linearen Glied lässt sich das System so weit vereinfachen, dass eine analytische Lösung gefunden werden kann. In diesem Abschnitt wird das Ergebnis abgeleitet und abgeschätzt, bis zu welcher Annäherung von Erde und Mond diese Näherung Gültigkeit besitzt.

Taylorentwicklung von \vec{f} nach Potenzen von $\frac{R}{r_s}$, also nach dem Abstand zwischen Erd- und Mondschwerpunkt in Einheit von Erdradien bis zum linearen Glied liefert

$$\vec{f} = (2 \cos \phi, \sin \phi) \quad (11)$$

Daraus folgt sofort die Normalkomponente

$$\vec{f} \cdot \vec{n} = 2 \cos^2 \phi - \sin^2 \phi \quad (12)$$

Eingesetzt in (8), (9) und (10) erhält man direkt den Tidenhub

$$\Delta R = \frac{3mR^4}{2Mr_s^3} \quad (13)$$

mit m : Mondmasse und M : Erdmasse.

Gültigkeit der Näherung:

In dieser Näherung ist Zenit- und Nadirhub gleich groß, die insbesondere bei kleinen Abständen dominierenden Unterschiede werden durch höhere Taylorglieder beschrieben. Trotzdem liefert die Näherung für nicht zu kleine Abstände gute Ergebnisse, für 20 oder mehr Erdradien ist der Fehler geringer als 10%, Tendenz stark abnehmend, weswegen etwa diesem Abstand die Näherung angebracht ist.

6 Zusammenfassung

Führt man das Gedankenexperiment der Annäherung des Mondes aus dem Unendlichen an die Erde durch, so lassen sich mit obigem Modell drei Bereiche (mit fließendem Übergang) festmachen:

- Vom Unendlichen bis herunter zu etwa 20 Erdradien ist die lineare Taylornäherung

$$\Delta R = \frac{3mR^4}{2Mr_s^3}$$

eine gute Approximation, so lange nicht explizit die Unterschiede zwischen Zenit- und Nadirflutberg betrachtet werden sollen.

- Bis zu einem Abstand von 2 Erdradien liefern die numerischen Ergebnisse der nicht genäherten Formel eine gute Beschreibung der Realität, in diesem Bereich sind Unterschiede zwischen Zenit und Nadir nicht mehr zu vernachlässigen.
- Für Abstände unterhalb zweier Erdradien muss man mit sehr komplexen weiteren Effekten rechnen, die die hier gemachte Modellvorstellung bei weitem überschreiten, bis hin zum kompletten Zerreißen der Erde; auch sind Rückwirkungen auf den mechanisch deutlich stabileren Mond zu erwarten.

7 Tabelle der numerischen Ergebnisse und Vergleich mit der Näherung

Abstand	Zenit	Nadir	Näherung (Zenit und Nadir)
1,3	102913046	12677,18204	53625,02
1,5	871936,3477	8987,065512	34907,90191
2	100927,2632	4580,128549	14726,77112
3	13261,31643	1785,657303	4363,487739
4	4014,270533	896,5842088	1840,84639
6	879,6236257	323,90367	545,4359673
8	321,985685	152,1715969	230,1057987
10	151,7770581	83,32045449	117,8141689
15	40,38848611	27,07567277	34,90790191
20	16,16587014	11,97644484	14,72677112
30	4,547860271	3,723517755	4,363487739
40	1,87004711	1,609572691	1,84084639
50	0,942926919	0,836303354	0,942513352
60	0,540157852	0,488755782	0,545435967
80	0,225011925	0,208753482	0,230105799
100	0,114336727	0,10767831	0,117814169

Abbildung 3: Vergleich mit der Näherung

	0	45	80	85	88	90	92	95	100	135	180
Winkel Phi											
Abstand in Erdradien											
1,3	102921444,8	76218,94284	9757,239187	8759,676503	8478,601899	8398,859153	8393,782889	8507,621597	8961,295572	15842,75182	21076,0412
1,5	878257,6764	52583,25341	7498,672764	6671,906709	6412,81352	6321,328726	6286,596282	6327,416231	6599,178901	11473,15979	15308,39424
2	104237,5545	21471,50425	3975,598972	3526,205946	3372,146407	3310,291348	3277,521713	3276,827325	3384,385302	5846,179748	7890,419897
3	14431,08294	5457,279512	1384,750903	1241,225495	1190,480978	1169,766513	1158,677936	1158,539225	1196,695852	2135,110145	2955,423816
4	4541,936615	2072,620515	614,7618018	556,2945913	535,7782934	527,666082	523,7190236	525,0673171	544,6485275	1007,600703	1424,250291
6	1043,944324	546,9784689	187,618552	171,714165	166,2996116	164,320698	163,5893865	164,7157077	172,0468974	335,4967497	488,224368
8	392,5548686	217,2492123	79,68077126	73,37190671	71,28147353	70,56918363	70,38426407	71,05735131	74,54718158	150,2656815	222,7407805
10	188,2104433	107,2267272	40,85468125	37,75998384	36,75610495	36,43338518	36,3808252	36,7923011	38,71155993	79,78088181	119,7538397
15	51,27318141	30,2440598	12,09227962	11,23195385	10,96257099	10,88469529	10,88689007	11,03689274	11,66090833	24,82127495	37,96036807
20	20,77121041	12,44765215	5,092374926	4,741770255	4,634290974	4,605340271	4,610170702	4,679612021	4,954984251	10,7317279	16,58178512
30	5,915245111	3,598013491	1,504943156	1,404768939	1,374784134	1,36738484	1,369994875	1,392428334	1,477676216	3,259050231	5,090902594
40	2,4473329	1,499231287	0,633883131	0,592409663	0,580156183	0,57728579	0,578638081	0,588498079	0,625241474	1,391979606	2,186858482
50	1,238596943	0,761924031	0,324205728	0,303213773	0,297062201	0,295670025	0,296439862	0,30161027	0,320663404	0,717993448	1,131973379
60	0,711294547	0,438749591	0,187479609	0,175425113	0,171912408	0,171136695	0,171612147	0,174651475	0,185770605	0,417563855	0,659892477
80	0,297223376	0,183955047	0,079015967	0,073979876	0,072522892	0,072211451	0,072427844	0,073734982	0,078475006	0,177251724	0,280964933
100	0,151312109	0,093835796	0,040431586	0,037868285	0,037129977	0,036975382	0,037091038	0,037767957	0,040209965	0,09109011	0,144653692

Abbildung 4: Numerische Ergebnisse der nicht taylorgenäherten Formel

Literatur

- [1] H. VOGEL: *Gerthsen Physik* 20. Aufl. (Springer Verlag, Berlin 1996)
- [2] W. DEMTRÖDER: *Experimentalphysik 1* 1. Aufl. (Springer Verlag, Berlin 1995)
- [3] L. BERGMANN, C. SCHAEFER: *Mechanik, Akustik, Wärme* 10. Aufl. (deGruyter Verlag, Berlin 1995)